

СТАТЬИ НА РУССКОМ ЯЗЫКЕ**ПРОМЫШЛЕННОСТЬ И ПРОИЗВОДСТВО****МАШИНОСТРОЕНИЕ И РОБОТОТЕХНИКА***Статья поступила в редакцию: 12.09.2026**Статья принята к публикации: 20.09.2026**Статья опубликована: 28.09.2026***УДК 623.442.58:519.224.2****DOI: 10.32743/UniTech.2026.150.9.23430****Оценка кучности спортивной винтовки по среднему радиусу группы*****Богословский Владимир Николаевич****д-р. техн. наук**Российская Федерация, г. Москва**E-mail: vnbog@mail.ru***Evaluation of sports rifle grouping accuracy based on the mean radius of the group*****Bogoslovsky Vladimir Nikolaevich****Dr. Tech. Sci**Russian Federation, Moscow***Аннотация**

Настоящая статья во многом повторяет структуру статьи [1], посвященной исследованию экстремального размера группы, но эта статья посвящена другому важному показателю кучности – среднему радиусу группы попаданий. Также как и статья [1], эта статья отвечает на практические вопросы: сколько групп и сколько выстрелов в группе достаточно для оценки кучности спортивной винтовки по среднему радиусу групп, каким ожидать среднее значение, если уже получено нескольких групп, какой будет средний радиус очередной группы, как связан средний радиус групп с кучностью спортивной винтовки и вероятностью попадания в цель. Для ответа на эти вопросы в статье построена точная вероятностная модель среднего радиуса группы (Mean Radius, MR) относительно выборочного СТП. Распределение MR получено прямым статистическим моделированием исходного двумерного нормального распределения попаданий. С использованием генератора

PCG64DXSM рассчитаны распределения средних радиусов групп по 3, 5, 10 и 100 выстрелов, а также центральные 80 %-е доверительные интервалы истинного среднего радиуса и прогнозные интервалы среднего радиуса следующей независимой группы для числа исходных групп от 1 до 10. Показано, что для инженерных оценок распределения среднего радиуса групп подходит Gamma-распределение, а при большом числе выстрелов в группе достаточно нормального распределения.

Установлена связь среднего радиуса групп MR_n с показателями кучности винтовки (круговым вероятным отклонением (КВО), средним радиусом (MR_∞) и непосредственно параметром распределения σ при известном центре рассеивания точек попаданий. Приведен реальный пример расчета кучности винтовки по среднему радиусу групп, сделанным винтовкой Accuracy AX в калибре .308 Winchester, и вероятности попадания в цель.

Статья будет полезна исследователям спортивного стрелкового оружия, спортсменам-стрелкам и всем любителям высокоточной стрельбы из нарезного оружия.

Работа выполнена в интересах мирового спортивного стрелкового сообщества по инициативе авторов и на их собственные средства, с использованием открытых источников информации.

Abstract

The present paper largely follows the structure of paper [1], which investigated shot-group extreme spread, but focuses on another important measure of precision—the mean radius of a shot group. It addresses the following practical questions: how many groups and how many shots per group are sufficient to assess competition-rifle precision using mean radius; how the population mean can be estimated after several groups have been measured; what mean radius may be expected for the next group; and how shot-group mean radius is related to rifle precision and the probability of hitting a target.

To answer these questions, an exact probabilistic model is developed for the shot-group mean radius (MR) calculated relative to the sample mean point of impact (MPI). The distribution of MR is obtained by direct statistical simulation of the underlying bivariate normal distribution of impact points. Using the PCG64DXSM pseudorandom number generator, distributions of mean radius are calculated for 3-, 5-, 10-, and 100-shot groups. Central 80 % confidence intervals for the population mean of MR_n , as well as prediction intervals for the mean radius of the next independent group, are determined for initial samples comprising from 1 to 10 groups. It is shown that the gamma distribution provides a suitable engineering approximation to the distribution of shot-group mean radius, whereas for groups containing a large number of shots, the normal distribution provides an adequate approximation.

The relationship between the finite-group mean radius MR_n and other rifle-precision metrics—circular error probable (CEP), the population mean radius MR_∞ , and the dispersion parameter σ for a known center of the impact distribution—is established. A practical example is presented in which rifle precision and hit probability are calculated from the mean radii of actual groups fired with an Accuracy AX rifle chambered in .308 Winchester.

The paper will be useful to researchers studying competition firearms, competitive shooters, and all enthusiasts of precision shooting with rifled firearms.

This work was carried out in the interests of the international competitive-shooting community, on the authors' own initiative and at their own expense, using publicly available sources of information.

Ключевые слова: кучность спортивной винтовки, средний радиус группы, Mean Radius, MR, двумерное нормальное распределение, доверительный интервал, прогнозный интервал, статистическое моделирование, Gamma-распределение, нормальное распределение.

Keywords: sporting-rifle precision, Mean Radius, MR, shot group, bivariate normal distribution, confidence interval, prediction interval, Monte Carlo simulation, Gamma distribution, Normal distribution.

Введение

В статье [1] мы отмечали, что для оценки кучности спортивного стрелкового оружия стрелки чаще всего используют показатель, называемый экстремальным размером группы (Extreme Spread, ES).

Однако размер групп ES при всей его простоте обладает рядом недостатков. Он считается самым слабым из статистических характеристик кучности, поскольку зависит только от двух наиболее удаленных попаданий и не использует информацию остальных выстрелов, чувствителен к случайным отрывам, неограниченно возрастает с ростом числа выстрелов в группе [1–4]. Особенно недостатки ES проявляются при большом числе выстрелов в группе, когда размер группы зачастую определяется одним отрывом (рис.1).

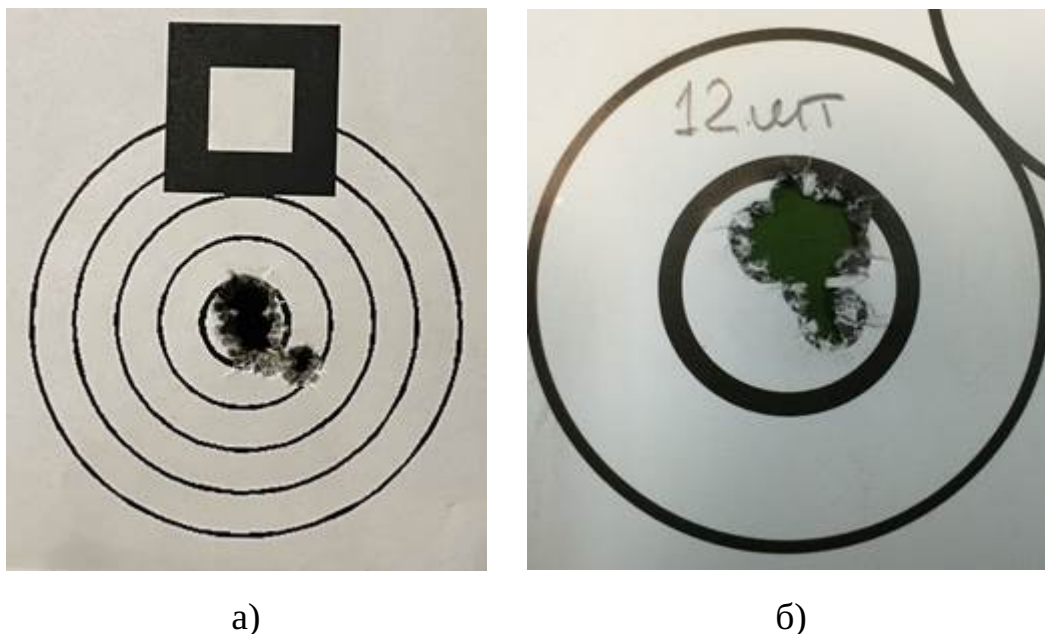


Рисунок 1. Группы по 10 (а) и 12 (б) выстрелов с одним отрывом

Поэтому область применения показателя ES ограничена. В основном это оценка размера групп из 3 выстрелов при настройке винтовки, оценка размера групп из 5 выстрелов при оценке кучности и при определении победителя в соревнованиях по бенчресту, быстрые приближенные оценки при сильно отличающихся группах. Для более достоверной оценки

кучности групп с числом выстрелов 5 и больше логичнее в качестве показателя кучности применять средний радиус групп MR_n [2–4]. Средний радиус группы MR_n при большом числе выстрелов в группе, в отличие от экстремального размера ES, является частью системы оценки кучности винтовки, основанной на использовании в качестве показателей кучности параметров распределения Рэлея с известным центром попадания [16].

Метод измерения кучности по среднему радиусу группы MR_n учитывает информацию о каждом выстреле в группе, а не только о двух худших пробойнах группы, как это имеет место при измерении максимального расстояния между пробойнами [1–4]. Показатель MR_n требует более сложных расчетов, чем ES, поскольку требуется определить выборочное СТП, от него измерить радиусы до каждой пробойны и вычислить средний радиус MR . Но с появлением программ обработки мишеней типа SubMOAPro и других это перестало быть проблемой.

Средний радиус группы из n выстрелов MR_n — это среднее расстояние от центра группы (средней точки попадания, СТП) - до центра попадания пули $R_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2}$. Средний радиус группы MR_n определяется как среднее арифметическое радиусов R_i по формуле:

$$MR_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i.$$

где R_i - расстояние от СТП группы до центра каждой пробойны, n – количество пробойн.

На практике средний радиус MR_n определяется по-другому, чем среднее расстояние от истинного центра MR в распределении Рэлея по одной существенной причине: мы никогда не знаем, где находится истинный центр распределения пробойн, принятый за точку отсчета в распределении Рэлея. Когда мы вычисляем центр группы на мишени по ограниченному числу точек попадания, он всегда будет находиться на некотором расстоянии от истинного центра попаданий, который мы можем определить точно только при бесконечно большом числе выстрелов, и, таким образом, недооцениваем истинное расстояние выборки выстрелов до центра распределения. Когда истинный центр неизвестен, мы должны использовать центр выборки, используя характеристики нормального распределения с неизвестным средним. В отличие от этого, модель Рэлея описывает распределение выстрелов из ненаблюдаемого нами истинного центра и среднее расстояние координат пробойн от него.

Математическое ожидание промаха r в распределении Рэлея при известном истинном центре распределения рассчитывается через параметр σ как

$$M(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma = 1,253\sigma.$$

Подробнее о связи среднего радиуса точек попадания MR с математическим ожиданием промаха r в распределении Рэлея можно прочитать в наших и других работах [2, 3, 16]. Информативность среднего радиуса MR_n повышается с увеличением количества выстрелов в группе в сравнении с экстремальным размером группы ES. Например, в группах по 5

выстрелов объективнее, чем ES_n , кучность будет отражать показатель MR_n , а в группах по 10–12 выстрелов показатель MR_n становится намного информативнее экстремального размера ES_n из-за большой вероятности отрыва от группы хотя бы одной пробойны (рис. 1).

На рис. 1. приведены две мишени с числом выстрелов 10 и 12. Мы уверены, что большинство стрелков – практиков скажут, что кучность винтовки на данных мишенях объективнее определять большой группой пробойн, а одну случайную пробойну в стороне можно рассматривать как отрыв. Если мы сравним формальные оценки обеих мишеней по показателям экстремального размера групп и по среднему радиусу групп, то увидим, что с учетом или без учета одиночной пробойны в стороне от основной группы экстремальный размер групп составляет соответственно на первой мишени 0,48 с учетом одиночной пробойны и 0,34 MOA без учета, на второй мишени 0,38 и 0,27 MOA, то есть отличается на 56% и 30 % соответственно, хотя сильно раздвинула группы лишь одна случайная пробойна. Показатель среднего радиуса для обеих мишеней с учетом и без учета отрыва составляет соответственно 0,13 MOA; 0,12 MOA и 0,1 MOA; 0,1 MOA, то есть, практически не меняется, потому что учитывает координаты всех точек попадания, и вклад в кучность одиночной пробойны с отрывом в этом случае достаточно мал.

Вместе с тем точно определить координаты всех точек попадания при высокой кучности, как на рис. 1, достаточно сложно. За исключением пробойн, контуры которых отслеживаются на мишени, координаты всех остальных точек попадания находятся где-то внутри большой дыры на рис. 1 и нет возможности для более точного расчета СТП и среднего радиуса MR_n в ситуации, когда пробойны накладываются одна на другую. И это тоже ограничивает применение среднего радиуса в качестве показателя кучности групп. Применение разных показателей кучности в какой-то степени изменяет даже философию мышления стрелка. Если использовать в качестве показателя кучности экстремальный размер, стрелок будет сильно переживать, что один отрыв так сильно раздвинул группу и увеличил размер группы. Особенно много таких огорчений в соревнованиях по бенчресту. Но если он применяет в качестве показателя кучности средний радиус, то понимает, что один отрыв в большой группе мало что изменил в оценке кучности, хотя и хотелось бы, чтобы эта пуля тоже залетела в основную группу. Он просто примет к сведению, что одна пуля из 10 ушла в отрыв, но зато 9 из 10 легли куда надо. И это, согласитесь, будет более объективная оценка кучности при большом числе выстрелов.

Средний радиус группы выстрелов MR_n лучше подходит для оценки кучности, если число выстрелов n в группе большое и координаты центров точек попадания могут быть определены с достаточной точностью.

Подведем итог обсуждения этого показателя кучности:

1. Средний радиус использует информацию о каждом выстреле в группе, а не только о двух наиболее удаленных точках. Благодаря большей информативности средний радиус может обеспечить более высокую достоверность оценки кучности, чем экстремальный размер группы.

2. С увеличением числа выстрелов в группе средний радиус все меньше зависит от отрыва, в то время как даже один отрыв может стать фатальным для оценки кучности по размеру группы.

3. Средний радиус группы в гораздо меньшей степени зависит от числа выстрелов в группе, что позволяет сравнивать кучность групп с разным числом выстрелов.

4. Применение среднего радиуса групп предполагает круговое распределение пробоев. Сильно вытянутое эллиптическое пятно пробоев нельзя оценивать этим показателем. Если группа сильно растянута в одном направлении или по диагонали, то оценивать ее кучность средним радиусом уже становится некорректно. В случае доказанных представительными выборками несимметричных распределений пробоев на мишени (например, расположение пробоев по диагонали) находятся главные оси распределения, и задача оценки кучности решается по каждой главной оси. В этом случае вводятся показатели кучности по вертикали и по горизонтали и рассматривается двухмерное коррелированное рассеивание пробоев. Можно при этом обсуждать, следуют ли группы стрельбы нормальному распределению или нет, но применяя средний радиус, как и в случае экстремального размера, для практики можно не ограничиваться только нормальным законом.

5. При малом числе выстрелов в группе и неизвестном центре попадания средний радиус группы, определенный относительно собственной СТП, завышает оценку кучности винтовки.

6. Наряду с достоинствами необходимо упомянуть и один существенный недостаток этого показателя. При очень кучной стрельбе, когда все пробоев объединяются практически в одну (это часто бывает при настройке винтовки на экстремальную кучность на короткой дистанции), определить СТП и средний радиус MR становится очень сложно, а иногда невозможно (рис. 1). Точно определить центры точек попадания, если не регистрировать координаты попаданий каждого выстрела, можно только на электронной мишени. Поэтому область практического применения показателя MR_n ограничивается стрельбой по мишеням на дальние дистанции или при невысокой кучности.

7. Средний радиус рассчитывается по более сложному алгоритму, чем размер группы, однако при использовании программ обработки мишеней этот недостаток исчезает.

Связь показателей кучности ES и MR с параметрами статистических распределений показана в работах [3, 4]. Сравнение показателей кучности ES и MR показывает, что экстремальный размер группы ES всегда намного больше среднего радиуса группы MR .

При настройке винтовки на экстремальную кучность мы рекомендуем использовать экстремальный размер группы ES в силу его простоты, а при более точной оценке кучности, числу выстрелов в группе больше 3 и хорошей различимости пробоев на мишени – использовать средний радиус MR или оба приведенных показателя.

Существует много программ обработки мишеней, которые автоматически вычисляют средний радиус по координатам точек попадания. Таким образом, сейчас не приходится заниматься какими-либо сложными вычислениями. Для облегчения обработки мишеней применяют такие программные средства, как RSI Shooting Lab, onTarget TDS, E-target, SubMOAPro и другие, которые по фотоснимку или скану мишени легко рассчитают экстремальный размер, средний радиус группы и расстояние СТП от точки прицеливания. Пакет shotGroups, например, кроме расчета максимального попарного расстояния (extreme spread) и среднего радиуса, рассчитывает CEP и другие характеристики, а также поддерживает статистический вывод по интервальным показателям кучности [27, 28].

Практика стрелкового спорта заключается в применении для оценки кучности винтовки одной или нескольких групп из 3 или 5, реже из 10 выстрелов. Две группы по 5 выстрелов стрелками считаются достаточными для оценки кучности в большинстве случаев [1]. Однако для такой практики можно выделить две проблемы, на которые указывает теория. Первая заключается в том, что средний радиус MR_n , так же, как и размер групп ES_n , при одной и той же кучности винтовки растет с ростом числа выстрелов в группе, поскольку рассчитывается относительно собственного СТП этой же группы, а не относительно истинного центра попаданий, вокруг которого и строится оценка кучности винтовки. В результате чего при малом числе выстрелов (2–5) мы получаем завышенные оценки кучности винтовки и несопоставимые между собой группы с разным числом выстрелов. В отличие от экстремального размера группы, средний радиус при увеличении числа выстрелов в группе стремится к значению среднего радиуса MR_∞ в распределении Рэлея. Если средний радиус группы MR_n рассчитывается относительно СТП этой же группы, а средний радиус распределения Рэлея MR_∞ — относительно истинного центра распределения, то:

$$MR_\infty = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$E[MR_n] = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$$

где $E[\cdot]$ — обозначение математического ожидания MR_n . Следовательно, искомое отношение равно:

$$\frac{E[MR_n]}{MR_\infty} = \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$$

Например, для группы из 3 выстрелов $E[MR_3] = 0,8165 MR_\infty$. То есть средний радиус, измеренный от СТП самой группы, в среднем составляет 81,65% генерального среднего радиуса распределения Рэлея. Для пересчёта в обратную сторону применяется соотношение:

$$MR_\infty = \frac{E[MR_n]}{\sqrt{1 - 1/n}}$$

Связь среднего радиуса группы MR_n со средним радиусом распределения Рэлея MR_∞ приведена в табл. 1. Например, средний радиус 0,20 МОА для группы из трех выстрелов при одной и той же кучности винтовки соответствует примерно 0,23 МОА для группы из 10 выстрелов и 0,245 МОА для бесконечного числа выстрелов, характеризующего кучность винтовки. Эти различия являются следствием того, что средний радиус измеряется относительно выборочного СТП этой же группы, а не относительно неизвестного центра попаданий [1, 3, 4, 16]. Не всем стрелкам понятно, что средний радиус или размер малой группы и кучность винтовки – это разные показатели, но это так, и ниже это различие будет показано. Логика различия заключается в том, что кучность винтовки – это ее

характеристика, которая не должна зависеть от числа выстрелов, с помощью которого эта кучность определялась. То есть, для данного состояния винтовки ее кучность – это константа, тогда как размер или средний радиус групп зависят от числа выстрелов в группе и числа групп, применяемых для расчета среднего значения.

Таблица 1.

Связь среднего радиуса группы MR_n со средним радиусом распределения Рэлея MR_∞

n	$E[MR_n]/MR_\infty$	Средний радиус группы, % от MR_∞	Занижение относительно MR_∞	Коэффициент пересчета $MR_n \rightarrow MR_\infty$
2	0,707107	70,71%	29,29%	1,414214
3	0,816497	81,65%	18,35%	1,224745
5	0,894427	89,44%	10,56%	1,118034
10	0,948683	94,87%	5,13%	1,054093
30	0,983192	98,32%	1,68%	1,017095
50	0,989949	98,99%	1,01%	1,010153
100	0,994987	99,50%	0,50%	1,005038

От числа выстрелов в группе зависит не только среднее значение, но и его относительный разброс вокруг среднего значения, который определяет доверительный интервал нахождения среднего значения средних радиусов групп (табл. 2), или ожидаемого значения очередной группы [4].

Таблица 2.

Коэффициенты вариации среднего радиуса группы MR_n

n	$CV(MR_n)$	В процентах от среднего значения
2	0,522723	52,272%
3	0,365298	36,530%
5	0,259225	25,922%
10	0,173505	17,350%
30	0,096930	9,693%
50	0,074611	7,461%
100	0,052513	5,251%

Стандартное отклонение σ для группы из 3 выстрелов составляет 36,5% от среднего значения. Это очень много. Поэтому одна малая группа дает очень неопределенную оценку. Размер следующей отдельной группы неопределен еще сильнее.

Неопределенность размера среднего значения MR_n или среднего радиуса очередной группы выявляет вторую проблему. Множество споров в социальных сетях идут именно вокруг вопросов, сколько нужно групп и сколько выстрелов в группе для оценки кучности

винтовки. По малому числу выстрелов средняя кучность определяется очень неточно. Если, например, по 3 выстрелам получен средний радиус одной группы $MR_3 = 0,2$ МОА, мы не можем сказать, что все остальные группы будут тоже 0,2 МОА, и средняя кучность будет тоже 0,2 МОА. Средний радиус следующих групп будет разбросан вокруг некоторого среднего значения в значительном диапазоне. Доверительный интервал среднего, оцененного по этой одной группе, например, с вероятностью 95 %, очень широкий и может составлять (0,11–0,54) МОА. То есть одна группа размером 0.2 МОА из трех выстрелов не доказывает надежно ни то, что «кучность винтовки по этой группе равна 0,2 МОА», ни то, что винтовка «в среднем стреляет 0.2 МОА». Она говорит, что если мы получили одну группу со средним радиусом в 0,2 МОА, то среднее значение MR_3 может лежать примерно в диапазоне (0,11–0,54) МОА. Неопределенным является не только среднее значение MR_3 , но и средний радиус следующей группы, если мы отстреляли одну или несколько групп, уже получили их средний радиус и хотим понять, какие группы ожидать дальше.

Свойства среднего радиуса групп уже рассматривались ранее в наших статьях [2–4], но в них мы делали инженерные оценки на сравнительно небольшой статистике. С увеличением быстродействия компьютеров появилась возможность получения точных значений зависимости среднего радиуса и стандартного отклонения от числа выстрелов в группе и расчета точных доверительных интервалов, которые дают исчерпывающие ответы на поставленные выше практические вопросы.

Цель данной статьи - получить точное распределения среднего радиуса групп MR_n непосредственно из модели координат попаданий, построить согласованные доверительные и прогнозные интервалы, определить область применения параметрических аппроксимаций и подкрепить предложенный методический подход экспериментом.

Материалы и методы

Для достаточно полного экспериментального исследования распределения MR_n потребовалось бы практически недостижимое число выстрелов. Поэтому исследования проведены методом компьютерного моделирования двумерной нормальной модели распределения точек попадания на мишени [2, 3]. Прямое моделирование дополнено моделированием стандартного положительного асимметричного Gamma – распределения и нормального распределения для компактной аналитической записи, генерации случайных размеров групп и быстрых приближенных расчетов, а также подкреплено численными примерами и натурным экспериментом с винтовкой Accuracy AX в калибре .308 Winchester.

Выбор закона распределения среднего радиуса группы MR_n .

Исходным для всех расчетов является двумерное нормальное распределение координат точек попаданий. Важно различать радиус одного попадания и средний радиус всей группы. При круговом двумерном нормальном распределении координат $X_i, Y_i \sim N(0, \sigma^2)$ радиус одного попадания $R_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2}$ относительно заранее известного истинного центра имеет распределение Рэлея: $R_i \sim Rayleigh(\sigma)$. Представим, что мы многократно получаем группы из n выстрелов и в каждой группе измеряем расстояние первого попадания до СТП этой же группы. Распределение этих расстояний будет распределением Рэлея. То же справедливо для

второго, третьего и любого другого попадания. Однако радиусы внутри одной группы зависимы, поскольку все они отсчитываются от общей СТП, вычисленной по тем же попаданиям. Поэтому из распределения Рэлея для каждого радиуса нельзя заключить, что средний радиус группы — это среднее независимых рэлеевских величин. То есть, распределение Рэлея относится к одному радиусу, а не к его среднему значению. Коэффициент вариации Рэлея всегда один и тот же. Для любого распределения Рэлея:

$$CV_{Rayleigh} = \sqrt{\frac{4 - \pi}{\pi}} \approx 0,5227.$$

Изменение параметра масштаба меняет среднее и стандартное отклонение, но не изменяет их отношение. Если радиус измеряется относительно СТП той же группы, то каждый отдельный остаточный радиус $R_i = \|X_i - \bar{X}\|$ также имеет распределение Рэлея, но с уменьшенным параметром масштаба:

$$s_n = \sigma \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$$

Однако исследуемый показатель — это не один такой радиус, а их среднее:

$$MR_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i.$$

Поскольку MR_n не один радиус R_i а n радиусов внутри группы, и они зависимы, так как все они рассчитываются относительно одной и той же выборочной СТП, то R_i может иметь распределение Рэлея, но MR_n распределению Рэлея не подчиняется. Ни при каком подборе масштаба распределение Рэлея не сможет одновременно воспроизвести правильное среднее и дисперсию MR_n . Например, для $n = 100$ рэлеевская модель дала бы относительный разброс 52,27%, тогда как действительный коэффициент вариации составляет только 5,25%. Это различие почти десятикратное.

Ниже построена точная модель для выборочного среднего радиуса группы, измеряемого относительно СТП этой же группы:

$$MR_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|X_i - \bar{X}\|.$$

Все интервалы относятся именно к $\mu_{MR,n} = E[MR_n]$, то есть к истинному среднему значению показателя MR_n для повторных групп по n выстрелов, а не к генеральному среднему радиусу MR_∞ . Такая постановка развивает сформулированную в исходной постановке задачу учета зависимости среднего радиуса от числа выстрелов и большой неопределенности малых групп. Расчет выполнен единым методом для $n = 3, | 5, | 10, | 100, m = 1, \dots, 10, P = 0, 80$.

1. Исходная математическая модель

Пусть в каждой группе координаты попаданий независимы и имеют круговое двумерное нормальное распределение: $X_i = (X_i, Y_i)$, $X_i, Y_i \sim N(0, \sigma^2)$.

СТП группы равно:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Расстояние i -го попадания от СТП: $R_i = \|X_i - \bar{X}\|$. Средний радиус одной группы:

$$MR_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i.$$

Средний радиус по m независимым группам:

$$\bar{MR}_{n,m} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m MR_{n,j}.$$

2. Точное математическое ожидание

$$MR_n$$

Остаточный вектор каждого попадания относительно выборочной СТП имеет дисперсию по каждой координате:

$$s_n^2 = \sigma^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Следовательно, каждый отдельный радиус R_i имеет распределение Рэлея с масштабом:

$$s_n = \sigma \sqrt{1 - \frac{1}{n}}.$$

Отсюда точное математическое ожидание среднего радиуса равно:

$$\mu_{MR,n} = E[MR_n] = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$$

Генеральный средний радиус относительно заранее известного истинного центра равен:

$$MR_\infty = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1,253314\sigma.$$

Поэтому:

$$\mu_{MR,n} = MR_{\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{n}}.$$

Систематическое уменьшение MR_n для малых групп возникает из-за того, что центр вычисляется по тем же n попаданиям.

3. Точная дисперсия и коэффициент вариации

Радиусы R_i внутри одной группы не являются независимыми. Для двух разных попаданий корреляция их остаточных координат равна:

$$\rho_n = -\frac{1}{n-1}.$$

Обозначим:

$$H_n = {}_2F_1 \left(-, \frac{1}{2}, -, \frac{1}{2} \frac{1}{(n-1)^2} \right),$$

где ${}_2F_1$ — гипергеометрическая функция Гаусса [21]. Точная дисперсия среднего радиуса:

$$Var(MR_n) = \frac{s_n^2}{n} \left[\frac{4-\pi}{2} + (n-1) \frac{\pi}{2} (H_n - 1) \right]$$

Точный коэффициент вариации:

$$CV^2(MR_n) = \frac{1}{n} \left[\frac{4}{\pi} - 1 + (n-1)(H_n - 1) \right]$$

Для среднего по m независимым группам:

$$E[\bar{M}R_{n,m}] = \mu_{MR,n},$$

$$Var(\bar{M}R_{n,m}) = \frac{Var(MR_n)}{m},$$

$$CV(\bar{M}R_{n,m}) = \frac{CV(MR_n)}{\sqrt{m}}$$

Точные моменты среднего радиуса группы MR_n приведены в табл. 3.

Следовательно, относительная случайная изменчивость одной группы для $n = 3$ составляет 36,53%, но для $n = 100$ только 5,25%. Это означает, что коэффициент вариации среднего радиуса групп с ростом числа выстрелов в группе уменьшается значительно быстрее, чем у размера групп.

Таблица 3.

Точные моменты среднего радиуса группы MR_n

n	E[MR _n]/σ	SD(MR _n)/σ	CV(MR _n)
3	1,023327	0,373819	0,365298
5	1,120998	0,290591	0,259225
10	1,188998	0,206297	0,173505
100	1,247032	0,065486	0,052513

4. Закон распределения среднего радиуса

Точная функция распределения MR_n задается многомерным интегралом:

$$F_{MR,n}(r) = \int I \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|x_i - \bar{x}\| \leq r \right] \prod_{i=1}^n \varphi_{\sigma}(x_i) dx_1 \dots dx_n.$$

При $n \geq 3$ она не сводится к простому стандартному распределению, поскольку расстояния до выборочной СТП зависимы. Закон обладает масштабной инвариантностью $MR_n = \sigma V_n$, $\bar{MR}_{n,m} = \sigma \bar{V}_{n,m}$, где распределения V_n и $\bar{V}_{n,m}$ зависят только от n и m . Поэтому все безразмерные коэффициенты доверительных и прогнозных интервалов не зависят от величины σ , единиц измерения, дистанции, если показатель выражен в угловых единицах.

Gamma-аппроксимация

Для компактных инженерных расчетов можно принять где [16, 17, 19, 25]: $MR_n \text{Gamma}(k_n, \theta_n)$,

$$k_n = \frac{1}{CV_n^2}$$

$$\theta_n = \mu_{MR,n} CV_n^2$$

Тогда:

$$\bar{MR}_{n,m} \text{Gamma} \left(m, k_n \frac{\theta_n}{m} \right).$$

Параметры Gamma-аппроксимации среднего радиуса группы MR_n приведены в табл. 4. Gamma-распределение здесь является аппроксимацией по первым двум моментам. Итоговые точные таблицы ниже получены не по Gamma-распределению, а непосредственно из двумерного нормального распределения координат [12, 15, 18, 20, 21, 24].

Таблица 4.

Параметры Гамма-аппроксимации среднего радиуса группы MR n

n	k _n	θ _n /σ
3	7,494	0,136556
5	14,882	0,075328
10	33,218	0,035793
100	362,628	0,003439

5. Метод прямого моделирования

Для прямого моделирования использован генератор *NumPy Generator*(PCG64DXSM) и метод `standard_normal(..., dtype=float64)` [14-19]. Проведено 2 000 000 независимых экспериментов. Каждый эксперимент включал 10 исходных независимых групп и одну дополнительную независимую новую группу. Использованы начальные состояния 20260801, | 20260802, | 20260803, | 20260804. Для каждой группы координаты генерировались для 100 попаданий. Для $n = 3, | 5, | 10$ использовались первые n попаданий, а СТП каждый раз рассчитывалась заново для соответствующей группы. Максимальное расхождение коэффициентов между двумя независимыми половинами моделирования составило 0,002708 для доверительных интервалов и 0,002878 для прогнозных интервалов. Поэтому значения приведены с тремя знаками. Последний знак для самых широких распределений при $n = 3$ имеет Монте-Карло-неопределенность порядка нескольких тысячных.

6. Гистограммы распределения

$$MR_n$$

На рис. 2 представлены гистограммы распределения нормированного среднего радиуса группы R_n [14]. По горизонтали отложена величина R_n :

$$\frac{MR_n}{E[MR_n]}.$$

Вертикальная линия соответствует среднему значению 1. На графиках также показаны Гамма- и нормальная аппроксимации.

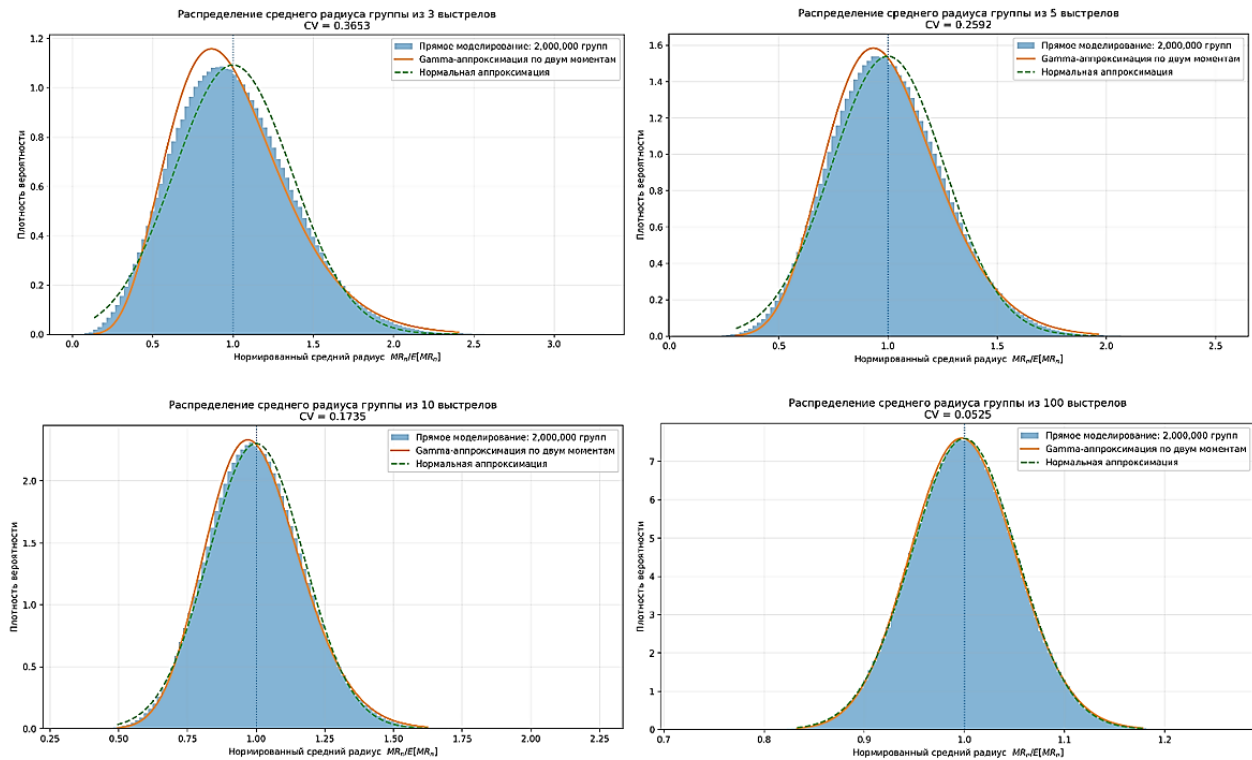


Рисунок 2. Распределение нормированного среднего радиуса группы из 3 выстрелов $CV = 0.3653$, из 5 выстрелов $CV = 0.2592$, из 10 выстрелов $CV = 0.1735$, из 100 выстрелов $CV = 0.0525$

Для всех четырех значений n Gamma-аппроксимация оказалась ближе к прямому распределению, чем обычная нормальная аппроксимация. При $n = 3$ распределение заметно асимметрично. Однако при $n = 10$ асимметрия заметно меньше, а при $n = 100$ оно уже практически симметрично, и применение нормального закона не приводит к большой ошибке. Асимметрия и точность аппроксимации распределения среднего радиуса MR_n представлены в табл. 5.

Таблица 5.

Асимметрия и точность аппроксимации распределения среднего радиуса MR_n

n	Асимметрия прямого распределения	D_{KS} , Gamma	D_{KS} , нормальное
3	0,4205	0,02051	0,02928
5	0,3089	0,01386	0,02114
10	0,2105	0,00929	0,01413
100	0,0623	0,00323	0,00409

7. Доверительный интервал истинного среднего

MR_n

Вводится безразмерная величина [20, 15]:

$$T_{n,m} = \frac{\bar{M}R_{n,m}}{\mu_{MR,n}}.$$

Пусть $t_{0,10}$ и $t_{0,90}$ — ее 10 %-й и 90 %-й квантили:

$$P \left(t_{0,10} \leq \frac{\bar{M}R_{n,m}}{\mu_{MR,n}} \leq t_{0,90} \right) = 0,80.$$

После обращения:

$$\mu_{MR,n} \in \left[K_L; \bar{M}R_{n,m} K_U \bar{M}R_{n,m} \right],$$

где:

$$K_L = \frac{1}{t_{0,90}}, \quad K_U = \frac{1}{t_{0,10}}$$

Коэффициенты центрального 80 %-го доверительного интервала истинного среднего MR_n представлены в табл. 6.

Таблица 6.

Коэффициенты центрального 80 %-го доверительного интервала

$m \setminus n$	3	5	10	100
1	0,673–1,827	0,746–1,479	0,815–1,280	0,937–1,072
2	0,746–1,478	0,807–1,300	0,863–1,184	0,954–1,050
3	0,784–1,360	0,837–1,233	0,885–1,146	0,963–1,040
4	0,807–1,299	0,856–1,196	0,899–1,124	0,967–1,035
5	0,825–1,260	0,869–1,172	0,909–1,109	0,971–1,031
6	0,838–1,232	0,879–1,155	0,916–1,099	0,973–1,028
7	0,848–1,211	0,887–1,142	0,922–1,091	0,975–1,026
8	0,856–1,196	0,894–1,132	0,927–1,085	0,977–1,024
9	0,864–1,182	0,899–1,123	0,931–1,080	0,978–1,023
10	0,870–1,172	0,904–1,116	0,934–1,075	0,979–1,022

Номинальное измеренное значение: $\bar{M}R_{n,m} = 1$.

8. Прогнозный интервал следующей группы

Для независимой будущей группы вводится отношение:

$$R_{n,m} = \frac{MR_{n,new}}{\bar{M}R_{n,m}}.$$

Если Q_L и Q_U — его 10 %-й и 90 %-й квантили:

$$MR_{n,new} \in \left[Q_L; \bar{M}R_{n,m} Q_U \bar{M}R_{n,m} \right]$$

Таблица 7.

Коэффициенты центрального 80 %-го прогнозного интервала следующей группы

m \ n	3	5	10	100
1	0,491-2,034	0,615-1,624	0,727-1,376	0,909-1,100
2	0,516-1,737	0,642-1,480	0,751-1,303	0,920-1,085
3	0,525-1,649	0,652-1,433	0,760-1,278	0,924-1,079
4	0,530-1,607	0,658-1,411	0,765-1,265	0,926-1,077
5	0,533-1,583	0,661-1,397	0,768-1,257	0,927-1,075
6	0,536-1,566	0,664-1,387	0,770-1,252	0,928-1,074
7	0,537-1,554	0,665-1,380	0,772-1,249	0,929-1,073
8	0,538-1,546	0,666-1,375	0,773-1,246	0,930-1,072
9	0,539-1,539	0,668-1,372	0,774-1,244	0,930-1,072
10	0,540-1,534	0,668-1,368	0,775-1,242	0,930-1,071

Прогнозный интервал шире доверительного, потому что учитывает не только неопределенность истинного среднего, но и собственный разброс будущей группы.

9. Доверительные интервалы в процентах от 100 %

Границы пересчитаны по формулам:
нижнее~отклонение = $(K_L - 1) \cdot 100\%$, верхнее~отклонение = $(K_U - 1) \cdot 100\%$.

Таблица 8.

80 %-й доверительный интервал истинного среднего MRn

m \ n	3	5	10	100
1	-32,7%...+82,7%	-25,4%...+47,9%	-18,5%...+28,0%	-6,3%...+7,2%
2	-25,4%...+47,8%	-19,3%...+30,0%	-13,7%...+18,4%	-4,6%...+5,0%
3	-21,6%...+36,0%	-16,3%...+23,3%	-11,5%...+14,6%	-3,7%...+4,0%
4	-19,3%...+29,9%	-14,4%...+19,6%	-10,1%...+12,4%	-3,3%...+3,5%
5	-17,5%...+26,0%	-13,1%...+17,2%	-9,1%...+10,9%	-2,9%...+3,1%
6	-16,2%...+23,2%	-12,1%...+15,5%	-8,4%...+9,9%	-2,7%...+2,8%
7	-15,2%...+21,1%	-11,3%...+14,2%	-7,8%...+9,1%	-2,5%...+2,6%
8	-14,4%...+19,6%	-10,6%...+13,2%	-7,3%...+8,5%	-2,3%...+2,4%
9	-13,6%...+18,2%	-10,1%...+12,3%	-6,9%...+8,0%	-2,2%...+2,3%
10	-13,0%...+17,2%	-9,6%...+11,6%	-6,6%...+7,5%	-2,1%...+2,2%

10. Прогнозные интервалы в процентах от 100 %

Таблица 9.

80 %-й прогнозный интервал MR_n следующей группы

$m \setminus n$	3	5	10	100
1	-50,9%...+103,4%	-38,5%...+62,4%	-27,3%...+37,6%	-9,1%...+10,0%
2	-48,4%...+73,7%	-35,8%...+48,0%	-24,9%...+30,3%	-8,0%...+8,5%
3	-47,5%...+64,9%	-34,8%...+43,3%	-24,0%...+27,8%	-7,6%...+7,9%
4	-47,0%...+60,7%	-34,2%...+41,1%	-23,5%...+26,5%	-7,4%...+7,7%
5	-46,7%...+58,3%	-33,9%...+39,7%	-23,2%...+25,7%	-7,3%...+7,5%
6	-46,4%...+56,6%	-33,6%...+38,7%	-23,0%...+25,2%	-7,2%...+7,4%
7	-46,3%...+55,4%	-33,5%...+38,0%	-22,8%...+24,9%	-7,1%...+7,3%
8	-46,2%...+54,6%	-33,4%...+37,5%	-22,7%...+24,6%	-7,0%...+7,2%
9	-46,1%...+53,9%	-33,2%...+37,2%	-22,6%...+24,4%	-7,0%...+7,2%
10	-46,0%...+53,4%	-33,2%...+36,8%	-22,5%...+24,2%	-7,0%...+7,1%

11. Пример применения

Для оценки среднего значения: Пусть отстреляны 3 группы по пять выстрелов: $n = 5$, $m = 3$, а выборочный средний радиус равен: $\bar{MR}_{5,3} = 0,200 \sim \text{МОА}$. Из табл. 3 доверительных интервалов $K_L - K_U = 0,837 - 1,233$. Следовательно $\mu_{MR,5} = 0,200 \cdot (0,837 - 1,233)$, $\mu_{MR,5} = 0,167 - 0,247 \sim \text{МОА}$.

Для следующей группы: Из табл. 4 $Q_L - Q_U = 0,652 - 1,433$. Поэтому $MR_{5,new} = 0,200 \cdot (0,652 - 1,433)$, $MR_{5,new} = 0,130 - 0,287 \sim \text{МОА}$.

Оценка кучности винтовки по среднему радиусу групп

В работе [1] отмечено, что в профессиональной практике кучность спортивного стрелкового оружия с круговым распределением точек попадания оценивается круговым вероятным отклонением (КВО), или СЕР (Circular Error Probable). Это радиус круга, внутри которого находится заданная доля попаданий. Например, для 50 % попаданий $\text{КВО}_{50} = R_{50} = 1,177\sigma$. Другим показателем является средний радиус попаданий MR , определяемый относительно центра распределения: $MR = 1,253\sigma$ [2–4]. У нас выше он также обозначен как MR_∞ . Поскольку СЕР и MR определяются через стандартное отклонение σ , в системе классификации баллистической кучности винтовок [2–4] в качестве основной характеристики рассеивания предложено использовать непосредственно параметр σ . Если распределение точек попадания является несимметричным, применяются показатели кучности стрелкового оружия, учитывающие это [3, 4].

Мы видели, что с ростом числа выстрелов в группе средний радиус групп растет от некоторого значения, определяемого числом выстрелов в группе, до значения MR_∞ , равного $1,253\sigma$. Его рост и стабилизация наступают намного быстрее, чем у размера групп (рис. 3).

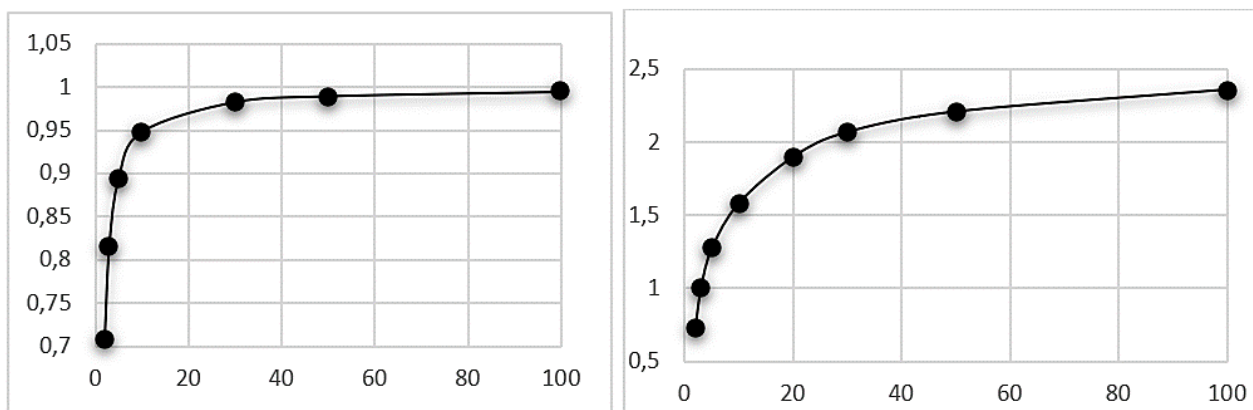


Рисунок 3. Зависимость нормированного среднего радиуса (слева) и размера групп (справа) от числа выстрелов в группе

Если принять средний радиус группы по 3 выстрела за 1, то аналогичный ему средний радиус группы по 5 выстрелов будет больше в 1,095 раз, а по 10 выстрелов – в 1,162 раза, и это составит уже 95 % от MR_{∞} . Сто выстрелов увеличивают размер группы в 1,22 раза. Быстрое приближение MR_n к MR_{∞} с ростом числа выстрелов в группе еще раз говорит о том, что при большом числе выстрелов в группе в качестве показателя кучности логичнее применять средний радиус групп. Для оценки кучности винтовки по среднему радиусу групп нужно решить два вопроса: 1) пересчитать группы в показатели кучности винтовки КВО (СЕР), MR или Б, и 2) установить, с какой точностью мы сможем сделать такой пересчет.

Отношение среднего радиуса групп к MR_{∞} в зависимости от числа выстрелов в группе определяется соотношением:

$$\frac{E[MR_n]}{MR_{\infty}} = \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$$

Учитывая, что $MR_{\infty} = 1,253\sigma$, получаем соотношения: $\sigma = 0,977 MR_3$, $\sigma = 0,893 MR_5$, $\sigma = 0,841 MR_{10}$, $\sigma = 0,812 MR_{30}$, $\sigma = 0,802 MR_{100}$, $\sigma = 0,798 MR_{\infty}$. Если наоборот известна σ , ожидаемый средний радиус группы можно оценить как: $MR_3 = 1,023\sigma$, $MR_5 = 1,12\sigma$, $MR_{10} = 1,189\sigma$, $MR_{30} = 1,232\sigma$, $MR_{100} = 1,247\sigma$.

Эти соотношения позволяют формально пересчитать средний радиус групп в показатели кучности винтовки R50 %, MR и σ . Средний радиус групп правомернее применять при большом числе выстрелов в группе. Во-первых, он более информативен, поскольку оценивает кучность не по двум крайним точкам попаданий, как размер групп, а по всем точкам. Во-вторых, средний радиус относится к тому же классу усредненных величин, как и показатели кучности винтовки, в то время как размер группы относится к другому классу экстремальных величин и непрерывно растет с ростом числа выстрелов в группе (рис. 3).

Например, мы имеем 2 группы по 5 выстрелов со средним радиусом $MR_5 = 0,2$ MOA. Соответствующие этому числу выстрелов стандартное отклонение равно $\sigma = 0,893 MR_5 = 0,179$ MOA, КВО = $1,177\sigma = 0,210$ MOA, MR = $1,253\sigma = 0,224$ MOA. Далее остается найти вероятный интервал изменения MR_5 и пересчитать в интервал изменения σ . Заходим в таблицу 3, находим группу по пять, спускаемся по этому столбцу, находим число групп 2,

на пересечении видим доверительный интервал (0,807–1,300) MR_5 . Умножаем границы интервала на 0,2 и на 0,326 и получаем границы для σ : $\sigma = (0,144–0,232)$ МОА с доверительной вероятностью 80 %. $KBO = (0,169 – 0,273)$ МОА, $MR = (0,180 – 0,291)$ МОА. Если увеличивать доверительную вероятность до 95 %, интервал будет намного шире. Например, если средний радиус группы из 3 выстрелов со средним значением 0,2 МОА и доверительным интервалом (0,11–0,54) МОА пересчитывается в кучность винтовки, представленную показателем $\bar{B}$, то нужно будет записать интервал $\bar{B} = (0,098–0,48)$ МОА. Можно вместо интервала принять верхнюю гарантированную оценку, например, $\bar{B} \leq 0,48$ МОА.

Что в итоге дает пересчет среднего радиуса групп в показатели кучности винтовки $\bar{B}$, $R_{50\%}$, MR ? Во-первых, мы будем знать реальный интервал или верхнее гарантированное значение кучности винтовки как некоторую постоянную величину. Но главное, этот пересчет позволяет оценить вероятность попадания в цель, например, в круг радиусом r с первого выстрела, или вероятность попадания хотя бы одним выстрелом из группы заданного размера, или процент попаданий при стрельбе сериями. А это главная задача для винтовки.

Связь показателей кучности винтовки с вероятностью попадания в цель.

Вероятность попадания в цель определяется двумя величинами: отклонением СТП от точки прицеливания или центра цели Δ , и рассеиванием точек попадания вокруг СТП. Если цель круглая, радиус цели равен $r = D/2$, где D — диаметр цели. Если рассеивание круговое, то $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, а смещение центра попаданий от точки прицеливания равно Δ , то вероятность попадания в круг радиуса r определяется по табл., приведенной в приложении и в нашей работе [1], там же представлены все формулы. Определение показателя $R_{50\%}$ как радиуса круга, содержащего заданную долю в 50 % попаданий, и методы расчёта круговых вероятностей подробно рассмотрены в классических работах по статистической оценке кучности [5, 8–11, 13].

Указанные соотношения для и справедливы только тогда, когда радиусы отсчитываются от истинного центра рассеивания, то есть от истинного СТП, и $MR R_{50\%} \Delta = 0$ $MR R_{50\%} \Delta > 0$. Поэтому для расчёта и как показателей именно кучности необходимо знать координаты истинной СТП. Если расстояния измеряются от точки прицеливания при, получаемые показатели учитывают одновременно случайное рассеивание и систематическое смещение СТП и характеризуют уже не только кучность, но и точность попадания [26, 13].

В эксперименте истинные координаты СТП неизвестны и заменяются выборочными средними координатами:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i.$$

Поэтому рассчитанные по малой группе значения MR , $R_{50\%}$ и σ сами являются случайными оценками и обладают дополнительной выборочной неопределённостью.

Расчет показателей $R_{50\%}$ и MR и вероятности попадания по этой таблице требует знания точных координат центра попадания относительно точки прицеливания. Чтобы определить вероятность попадания в цель, размер которой указан в МОА, нужно определить также в МОА стандартное отклонение σ и отклонение СТП от точки прицеливания Δ .

Например, размер гонга 1 МОА, радиус гонга 0,5 МОА, стандартное отклонение $\sigma = 0,5$ МОА, отклонение СТП от точки прицеливания $\Delta = 1$ МОА. Считаем $r/\sigma = 1$, $\Delta/\sigma = 2$. Заходим с этими значениями в таблицу (Приложение) и на пересечении столбца и строки находим значение вероятности попадания в цель 0,082 или 8,2 %. Если размер цели указан в см, то нужно для этой дистанции значения σ и Δ указать тоже в см. Если размер гонга 20 см, радиус гонга 10 см, стандартное отклонение для этой дистанции 10 см, отклонение СТП от точки прицеливания 20 см, $r/\sigma = 1$, $\Delta/\sigma = 2$, и вероятность попадания также равна 8,2 %.

Таким образом, цепочка оценки кучности по среднему радиусу групп замыкается на вероятности попадания в цель. Зная среднее значение или вероятный диапазон среднего радиуса групп, мы можем оценить среднее или вероятный диапазон стандартного отклонения σ и по нему определить вероятность попадания в цель.

В конце статьи приведем реальный пример оценки кучности винтовки по среднему радиусу групп и вероятности попадания в цель. Винтовка Accugacy AX в калибре .308 Win, твист 12, пуля Scenar 185 gr, порох VihtaVuori 150, навеска 46 gr, капсюль RWS, гильза Lapua, скорость 850 м/с, температура +29 С (рис. 4). Используется для охоты на средних дистанциях.

Настройка, проверка настройки и пристрелка были проведены в Центре настройки спортивно-стрелкового клуба им. Дмитрия Донского.

После настройки винтовки было сделано 5 контрольных групп по 3 выстрела в каждой. В верхнем ряду (рис. 4б) левая мишень имеет одну пробоину, а три правых по 3 пробоины. СТП всех трех групп находится примерно в одном месте. В нижнем ряду две группы по 3 выстрела делались при обнулении прицела, поэтому СТП меняла координаты после смещения марки прицела. Средний радиус групп составил 0,09, 0,04, 0,06, 0,08 и 0,08 МОА, среднее значение $MR_3=0,07$ МОА.



Рисунок 4. а-винтовка Ассигасу АХ на стрелковом столе; б, в, – 5 контрольных групп по 3 выстрела после настройки винтовки

Определим кучность винтовки и вероятность попадания в цель. Входим в табл. 6 и находим 80 %-й интервал среднего значения экстремального размера группы. Он составляет 0,825–1,260. Пересчитываем на средний размер групп 0,07 MOA и получаем интервал среднего размера групп (0,058–0,088) MOA. Можно также оценить, в каком диапазоне можно было бы ожидать средний радиус шестой группы? Для этого входим в табл. 7 и видим интервал 0,533–1,583. Пересчитываем на известное среднее значение MR и получаем, что шестую группу можно было бы ожидать в диапазоне (0,037–0,111) MOA.

Для трех выстрелов в группе параметр σ связан со средним радиусом групп соотношением $\sigma = 0,977 MR_3$, откуда получаем доверительный интервал $\sigma = (0,036–0,108)$ MOA. Примем для расчетов верхнюю оценку $\sigma = 0,108$ MOA. После обнуления прицела координаты СТП относительно точки прицеливания в одной группе стали равны (0,04"; 0,14"), или на дистанции 100 метров (0,035; 0,122) MOA, то есть, угловое отклонение СТП составляет примерно 0,127 MOA. Примем диаметр цели на дистанции 500 метров 10 см или 0,69 MOA и определим вероятность попадания в нее без учета ошибок стрелка и влияния внешних условий. Вычислим отношения r/σ и Δ/σ в MOA. $r/\sigma = 0,345/0,108 = 3,19$, $\Delta/\sigma = 0,127/0,108 = 1,176$. Заходим в табл. и видим цифру 0,972 или 97 %. Помним, что это оценка по верхней границе. Таким образом, по этим расчетам техническая кучность винтовки обеспечивает почти стопроцентное попадание в цель диаметром 10 см на дистанции 500 метров, то есть, практическая вероятность попадания в основном зависит от ошибок стрелка

и влияния внешних условий. Для сравнения, если бы техническая кучность винтовки была не лучше 1 МОА, как у многих не настроенных охотничьих винтовок, то вероятность попадания в эту цель была бы менее 10 %, и доминировала бы она, а ошибки стрелка и внешние условия вообще дополнительно свели бы вероятность к очень низкой цифре.

Заключение

В найденной литературе не обнаружена единая публикация, в которой итоговая формула дисперсии именно выборочного среднего радиуса была бы приведена в той же законченной форме, которая использована в выполненной работе. Поэтому формулу для математического ожидания $E[MR_n]$, зависимость корреляции остаточных координат и итоговое выражение для $CV(MR_n)$ логично представить как вывод автора на основе известных свойств центрированной нормальной выборки, распределения Рэлея, многомерного распределения коррелированных радиусов и гипергеометрической функции.

Таблицы доверительных и прогнозных интервалов и гистограммы рассчитаны автором методом прямого статистического моделирования кругового двумерного нормального распределения с использованием генератора PCG64DXSM. Таблицы K_L , K_U , Q_L , Q_U , их процентные представления и построенные гистограммы являются оригинальными результатами расчёта, а не данными, заимствованными из перечисленных источников. Источники [12, 15, 18, 20–24, 26] обосновывают метод интервального оценивания, способ определения эмпирических квантилей, метод Монте-Карло и используемый генератор случайных чисел. Полученные цифровые данные можно описать следующими положениями:

1. Средний радиус статистически эффективнее экстремального размера, поскольку использует все попадания группы.

2. Одна группа из 3 выстрелов дает очень неопределенную оценку: $\mu_{MR,3} = 0,673 - 1,827$ от измеренного значения.

1. Даже после десяти групп из 3 выстрелов 80 %-й доверительный интервал составляет: $0,870 - 1,172$, то есть приблизительно: $-13,0\% \dots + 17,2\%$.

Для пяти групп по пять выстрелов неопределенность истинного среднего уже уменьшается до: $-13,1\% \dots + 17,2\%$.

1. Прогноз одной следующей группы остается значительно шире. Даже после десяти групп по пять выстрелов следующая группа ожидается примерно в пределах: $-33,2\% \dots + 36,8\%$ от уже измеренного среднего.

1. При $n = 100$ средний радиус очень устойчив: уже одна группа дает 80 %-й интервал истинного среднего порядка: $-6,3\% \dots + 7,2\%$. Однако 100 и более групп на практике никто не делает.

Список литературы

1. Богословский В.Н. Оценка кучности спортивной винтовки по экстремальному размеру группы [Электронный ресурс]. // Universum: технические науки: электрон. научн. журн. – 2026. URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/23285> (дата обращения: 09.09.2026).

2. Богословский В.Н., Кадомкин В.В., Жуков И.Г. Показатели кучности спортивной и охотничьей винтовки. Аналитический обзор // *Universum: технические науки: электрон. науч. журн.* – 2024. – № 4. – DOI: 10.32743/UniTech.2024.121.4.17376. URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/17376> (дата обращения: 08.09.2026).
3. Богословский В.Н., Кадомкин В.В., Жуков И.Г. Математические модели, описывающие закономерности рассеивания пробойн и показатели кучности при спортивной стрельбе по мишеням. Аналитический обзор // *Universum: технические науки: электрон. науч. журн.* – 2024. – № 4. – DOI: 10.32743/UniTech.2024.121.4.17356. URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/17356> (дата обращения: 08.09.2026).
4. Богословский В.Н., Кадомкин В.В., Жуков И.Г. Оценка кучности спортивной винтовки по экстремальному размеру или среднему радиусу групп // *Universum: технические науки: электрон. науч. журн.* – 2024. – № 11. – DOI: 10.32743/UniTech.2024.128.11.18711. URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/18711> (дата обращения: 08.09.2026).
5. ДиДонато А.Р., Джарнагин М.П. DiDonato A.R., Jarnagin M.P. A Method for Computing the Circular Coverage Function // *Mathematics of Computation.* – 1962. – Т. 16, № 79. URL: <https://www.jstor.org/stable/2004054> (accessed: 11.09.2026).
6. Blischke W.R., Halpin A.H. Asymptotic Properties of Some Estimators of Quantiles of Circular Error // *Journal of the American Statistical Association.* – 1966. – Т. 61, № 315. – DOI: 10.1080/01621459.1966.10480893.
7. DiDonato A.R., Jarnagin M.P. DiDonato A.R., Jarnagin M.P. Integration of the General Bivariate Gaussian Distribution over an Offset Circle // *Mathematics of Computation.* – 1961. – Т. 15, № 76. URL: <https://www.jstor.org/stable/2003026> (accessed: 11.09.2026).
8. Grubbs F.E. Approximate Circular and Noncircular Offset Probabilities of Hitting // *Operations Research.* – 1964. – Т. 12, № 1. – DOI: 10.1287/opre.12.1.51.
9. Grubbs F.E. Statistical Measures of Accuracy for Riflemen and Missile Engineers. – Ann Arbor, MI: Edwards Brothers. – 1964. – 50 P.
10. Harris C.R., Millman K.J. van der Walt S.J. [et al.]. Array Programming with NumPy // *Nature.* – 2020. – Т. 585, № 7825. – DOI: 10.1038/s41586-020-2649-2.
11. Harter H.L. Circular Error Probabilities // *Journal of the American Statistical Association.* – 1960. – Т. 55, № 292. URL: <https://www.jstor.org/stable/2281595> (accessed: 11.09.2026).
12. Hunter J.D. Matplotlib: A 2D Graphics Environment // *Computing in Science & Engineering.* – 2007. – Т. 9, № 3. – DOI: 10.1109/MCSE.2007.55.
13. Hyndman R.J., Fan Y. Sample Quantiles in Statistical Packages // *The American Statistician.* – 1996. – Т. 50, № 4. – DOI: 10.1080/00031305.1996.10473566.
14. Jensen D.R. A Generalization of the Multivariate Rayleigh Distribution // *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics. Series A.* – 1970. – Т. 32, № 2. URL: <https://www.jstor.org/stable/25049655> (accessed: 08.09.2026).
15. Johnson N.L., Kotz S., Balakrishnan N. Continuous Univariate Distributions. – 2nd ed. – Vol. 1. – New York: John Wiley & Sons, 1994. – XIX, 756 P.

16. Kroese D.P., Taimre T., Botev Z.I. Handbook of Monte Carlo Methods. – Hoboken, NJ: John Wiley & Sons. – 2011. – 772 P. – DOI: 10.1002/9781118014967.
17. Mardia K.V., Kent J.T., Bibby J.M. Multivariate Analysis. – London; New York: Academic Press, 1979. – XV, 521 P.
18. Meeker W.Q., Hahn G.J., Escobar L.A. Statistical Intervals: A Guide for Practitioners and Researchers. – 2nd ed. – Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2017. – XXXV, 592 P. – DOI: 10.1002/9781118594841.
19. NIST Digital Library of Mathematical Functions. Chapter 15: Hypergeometric Function / National Institute of Standards and Technology [Электронный ресурс]. – 2026. URL: <https://dlmf.nist.gov/15> (accessed: 08.09.2026).
20. NumPy Developers. Permuted Congruential Generator (64-bit, PCG64 DXSM) [Электронный ресурс]. // NumPy Reference. Документация описывает PCG64DXSM, его состояние, инициализацию, период и применение совместно с объектом Generator. – 2026. URL: https://numpy.org/doc/stable/reference/random/bit_generators/pcg64dxsm.html (дата обращения: 08.09.2026).
21. NumPy Developers. `numpy.random.Generator.standard_normal` [Электронный ресурс]. // NumPy Reference. URL: https://numpy.org/doc/stable/reference/random/generated/numpy.random.Generator.standard_normal.html (accessed: 08.09.2026).
22. O'Neill M.E. PCG: A Family of Simple Fast Space-Efficient Statistically Good Algorithms for Random Number Generation: technical report HMC-CS-0905. – Claremont, CA: Harvey Mudd College [Электронный ресурс]. – 2014. – 56 с. URL: <https://www.cs.hmc.edu/tr/hmc-cs-2014-0905.pdf> (accessed: 08.09.2026).
23. Rice S.O. Mathematical Analysis of Random Noise // Bell System Technical Journal. – 1944. – Т. 23, № 3. – DOI: 10.1002/j.1538-7305.1944.tb00874.x.
24. Virtanen P., Gommers R., Oliphant T.E. [et al.]. SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python // Nature Methods. – 2020. – Т. 17, № 3. – DOI: 10.1038/s41592-019-0686-2.
25. Wollschläger D. shotGroups: Analyze Shot Group Data: R package, version 0.8.4. – 2025 Пакет содержит средства расчёта среднего радиуса, экстремального размера, СЕР, радиальных распределений и интервальных показателей кучности [Электронный ресурс]. – DOI: 10.32614/CRAN.package.shotGroups. URL: <https://CRAN.R-project.org/package=shotGroups> (дата обращения: 08.09.2026).
26. Wollschläger D. Statistical Analysis of Shooting Results with the R shotGroups Package: руководство пользователя [Электронный ресурс]. – 2025. – 53 с. URL: <https://cran.r-project.org/web/packages/shotGroups/vignettes/shotGroups.pdf> (accessed: 08.09.2026).

References

1. Bogoslovskij V.N. [Evaluation of Rifle Accuracy by the Extreme Size of a Group] // Universum: tekhnicheskie nauki: elektron. nauchn. zhurn. – 2026. – URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/23285>. (accessed 30.09.2026). (In Russ.)

2. Bogoslovskij V.N., Kadomkin V.V., Zhukov I.G. [Accuracy Indicators of Sport and Hunting Rifles. An Analytical Review] // *Universum: tekhnicheskie nauki: elektron. nauch. zhurn.* – 2026. – No. 4. – DOI: 10.32743/UniTech.2024.121.4.17376 – URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/17376>. (accessed 30.09.2026). (In Russ.)
3. Bogoslovskij V.N., Kadomkin V.V., Zhukov I.G. [Mathematical Models Describing the Patterns of Shot Dispersion and Accuracy Indicators in Target Shooting. An Analytical Review] // *Universum: tekhnicheskie nauki: elektron. nauch. zhurn.* – 2026. – No. 4. – DOI: 10.32743/UniTech.2024.121.4.17356 – URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/17356>. (accessed 30.09.2026). (In Russ.)
4. Bogoslovskij V.N., Kadomkin V.V., Zhukov I.G. [Evaluation of Rifle Accuracy by the Extreme Size or Mean Radius of Groups] // *Universum: tekhnicheskie nauki: elektron. nauch. zhurn.* – 2026. – No. 11. – DOI: 10.32743/UniTech.2024.128.11.18711 – URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/18711>. (accessed 30.09.2026). (In Russ.)
5. DiDonato A.R., Jarnagin M.P. [DiDonato A.R., Jarnagin M.P. A Method for Computing the Circular Coverage Function] // *Mathematics of Computation.* – 1962. – Vol. 16, No. 79 – URL: <https://www.jstor.org/stable/2004054> (accessed: 11.09.2026). (In Russ.)
6. Blischke W.R., Halpin A.H. Asymptotic Properties of Some Estimators of Quantiles of Circular Error // *Journal of the American Statistical Association.* – 1966. – Vol. 61, No. 315. – DOI: 10.1080/01621459.1966.10480893.
7. DiDonato A.R., Jarnagin M.P. DiDonato A.R., Jarnagin M.P. Integration of the General Bivariate Gaussian Distribution over an Offset Circle // *Mathematics of Computation.* – 1961. – Vol. 15, No. 76 – URL: <https://www.jstor.org/stable/2003026> (accessed: 11.09.2026).
8. Grubbs F.E. Approximate Circular and Noncircular Offset Probabilities of Hitting // *Operations Research.* – 1964. – Vol. 12, No. 1. – DOI: 10.1287/opre.12.1.51.
9. Grubbs F.E. Statistical Measures of Accuracy for Riflemen and Missile Engineers. – Ann Arbor, MI: Edwards Brothers. – 1964. – 50 P.
10. Harris C.R., Millman K.J. van der Walt S.J. [et al.]. Array Programming with NumPy // *Nature.* – 2020. – Vol. 585, No. 7825. – DOI: 10.1038/s41586-020-2649-2.
11. Harter H.L. Circular Error Probabilities // *Journal of the American Statistical Association.* – 1960. – Vol. 55, No. 292 – URL: <https://www.jstor.org/stable/2281595> (accessed: 11.09.2026).
12. Hunter J.D. Matplotlib: A 2D Graphics Environment // *Computing in Science & Engineering.* – 2007. – Vol. 9, No. 3. – DOI: 10.1109/MCSE.2007.55.
13. Hyndman R.J., Fan Y. Sample Quantiles in Statistical Packages // *The American Statistician.* – 1996. – Vol. 50, No. 4. – DOI: 10.1080/00031305.1996.10473566.
14. Jensen D.R. A Generalization of the Multivariate Rayleigh Distribution // *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics. Series A.* – 1970. – Vol. 32, No. 2 – URL: <https://www.jstor.org/stable/25049655> (accessed: 08.09.2026).
15. Johnson N.L., Kotz S., Balakrishnan N. Continuous Univariate Distributions. – 2nd ed. – Vol. 1. – New York: John Wiley & Sons, 1994. – XIX, 756 P.

16. Kroese D.P., Taimre T., Botev Z.I. Handbook of Monte Carlo Methods. – Hoboken, NJ: John Wiley & Sons. – 2011. – 772 P. – DOI: 10.1002/9781118014967.
17. Mardia K.V., Kent J.T., Bibby J.M. Multivariate Analysis. – London; New York: Academic Press, 1979. – XV, 521 P.
18. Meeker W.Q., Hahn G.J., Escobar L.A. Statistical Intervals: A Guide for Practitioners and Researchers. – 2nd ed. – Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2017. – XXXV, 592 P. – DOI: 10.1002/9781118594841.
19. NIST Digital Library of Mathematical Functions. Chapter 15: Hypergeometric Function / National Institute of Standards and Technology – 2026. – URL: <https://dlmf.nist.gov/15> (accessed: 08.09.2026).
20. NumPy Developers. Permuted Congruential Generator (64-bit, PCG64 DXSM) // NumPy Reference. Документация описывает PCG64DXSM, его состояние, инициализацию, период и применение совместно с объектом Generator. – 2026. – URL: https://numpy.org/doc/stable/reference/random/bit_generators/pcg64dxsm.html (accessed: 08.09.2026).
21. NumPy Developers. numpy.random.Generator.standard_normal // NumPy Reference. – URL: https://numpy.org/doc/stable/reference/random/generated/numpy.random.Generator.standard_normal.html (accessed: 08.09.2026).
22. O'Neill M.E. PCG: A Family of Simple Fast Space-Efficient Statistically Good Algorithms for Random Number Generation: technical report HMC-CS-0905. – Claremont, CA: Harvey Mudd College – 2014. – 56 с. – URL: <https://www.cs.hmc.edu/tr/hmc-cs-2014-0905.pdf> (accessed: 08.09.2026).
23. Rice S.O. Mathematical Analysis of Random Noise // Bell System Technical Journal. – 1944. – Vol. 23, No. 3. – DOI: 10.1002/j.1538-7305.1944.tb00874.x.
24. Virtanen P., Gommers R., Oliphant T.E. [et al.]. SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python // Nature Methods. – 2020. – Vol. 17, No. 3. – DOI: 10.1038/s41592-019-0686-2.
25. Wollschläger D. shotGroups: Analyze Shot Group Data: R package, version 0.8.4. – 2025 Пакет содержит средства расчёта среднего радиуса, экстремального размера, СЕР, радиальных распределений и интервальных показателей кучности – DOI: 10.32614/CRAN.package.shotGroups. – URL: <https://CRAN.R-project.org/package=shotGroups> (дата обращения: 08.09.2026).
26. Wollschläger D. Statistical Analysis of Shooting Results with the R shotGroups Package: руководство пользователя – 2025. – 53 с. – URL: <https://cran.r-project.org/web/packages/shotGroups/vignettes/shotGroups.pdf> (accessed: 08.09.2026).